dev : Galton Watson.

Leçons : 229, 241, 243, 253, 264.

ref : Caldero - Carnet de Voyage en Analystan p 286 ; Exercices de probabilités - Cottrell Genon.. p 72.

Thm : Soit X une v.a. admettant un moment d'ordre 1 $m = \mathbb{E}(X) < +\infty$. et à valeur dans $\mathbb{N}$.
On note $p_k := \mathbb{P}(X=k)$. Soit (X_i^n) une famille de v.a iid suivant la même loi que X.
On définie : $\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. On suppose $Z_n \perp\!\!\!\perp X_i^n$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

< 1'30
On définit l'évènement extinction, noté ext, comme $\{\exists n \geq 0, Z_n = 0\}$.

≈ 1'20
Alors : si $m \leq 1$ et $X \neq 1$ p.s. alors $\mathbb{P}(ext) = 1$
sinon $\mathbb{P}(ext) \in [0, 1[$.

changer en $p_0 + p_1 = 1$.

4'30 < < 5'
dem Wald : (que pour L 266) énoncé : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ v.a. iid ; N v.a. $\mathbb{N}$; $S_n = \sum_{k=0}^{N} X_k$.
Le rayon de convergence d'une fonction génératrice est $R \geq 1$ donc :
$\forall |z| \leq 1$, $G_S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S=n) z^n$.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $\mathbb{P}(S=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S=n, N=k)$ par formule des proba totale $(\{N=k\})_k$ s.c.e.

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} X_i}_{S_k} = n) \mathbb{P}(N=k)$ par $N \perp\!\!\!\perp X_i \rightsquigarrow N \perp\!\!\!\perp S$.

* Ainsi, pour $|z| \leq 1$.

$$G_S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(N=k) \right] z^n$$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_k = n) z^n \right) \mathbb{P}(N=k)$ par Fubini famille sommable : $\sum \mathbb{P}(S)\mathbb{P}(N) \leq \sum \mathbb{P}(S) \times 1 \leq 1$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k) \, G_{S_k}(z)$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k) \, (G_X(z))^k$ car les X_i sont indépendants.

$= G_N(G_X(z))$

dem : ① + ② + ③ = 6'30

5' + intro ≈ 2'30 entre 2'30 et 3min

On s'intéresse à $ext = \{\exists N \geq 0, Z_N = 0\}$.
Rq : * si $p_0 = 0$, $Z_n \geq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{P}(ext) = 0$ car $X_i^n \geq 1$: il y aura tjrs descendants.
* si $p_1 = 1$, $Z_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ donc $\mathbb{P}(ext) = 1$
On supposera donc jusqu'à la fin que $p_0 \in]0, 1[$.

① . $\mathbb{P}(ext) = \mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\})$

Or $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(\{Z_n = 0\})_n$ est une suite croissante d'où :
$\mathbb{P}(ext) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} G_n(0)$. où G_n est la fonction génératrice de Z_n.

5' On note $l \in [0, 1]$ cette limite.

② Etude G_n :
Soient $n \in \mathbb{N}$, $z \in [0, 1]$. Par la formule de Wald : $G_{n+1}(z) = G_n(G_X(z))$
(où G est la fonction caractéristique de X)
De plus $G_0(z) = z$ (car $\mathbb{P}(Z=1) = 1$).
Donc par récurrence : $G_n(z) = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n \text{ fois}}(z)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

③ Plus petit point fixe :
Ainsi : $G_{n+1}(0) = G(G_n(0))$ $\forall n \in \mathbb{N}$
8'44 Donc, $n \to +\infty$: $l = G(l)$ ⊛ et l est donc point fixe de G. (par continuité de G sur $[0, 1]$)

Notons r le plus petit point fixe de G dans $[0, 1]$ (existe car 1 en est un)

Comme G est croissante (comme fonction génératrice) et continue sur $[0,1]$ $(R \geq 1)$
on a : $G([0,r]) = [G(0), G(r)] \subset [0,r]$ (car r est point fixe).
Ainsi, comme $G(0) = 0 \in [0,r]$ on en déduit que $l \in [0,r]$ puis $l = r$ comme seule valeur propre sur $[0,r]$.

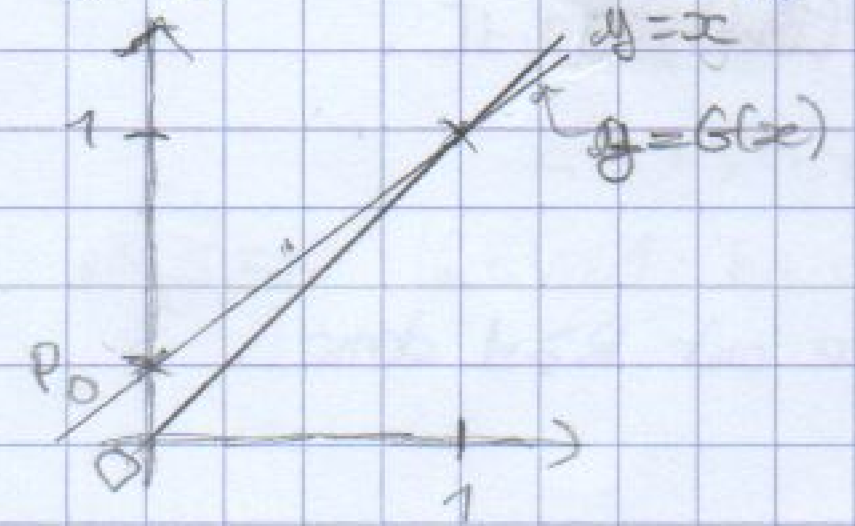
10'30

⑥ Etude des points fixes : (L 266 : vite fait oral)

On étudie G. Son rayon de convergence étant supérieur à 1, G est indéfiniment dérivable sur $[0,1[$ et :

$$\forall t \in [0,1[\qquad G'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p_k t^{k-1} \quad \text{et} \quad G''(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) p_k t^{k-2}.$$

* si $p_0 + p_1 = 1$: $G(t) = p_0 + p_1 t$ est affine et on est dans le cas :

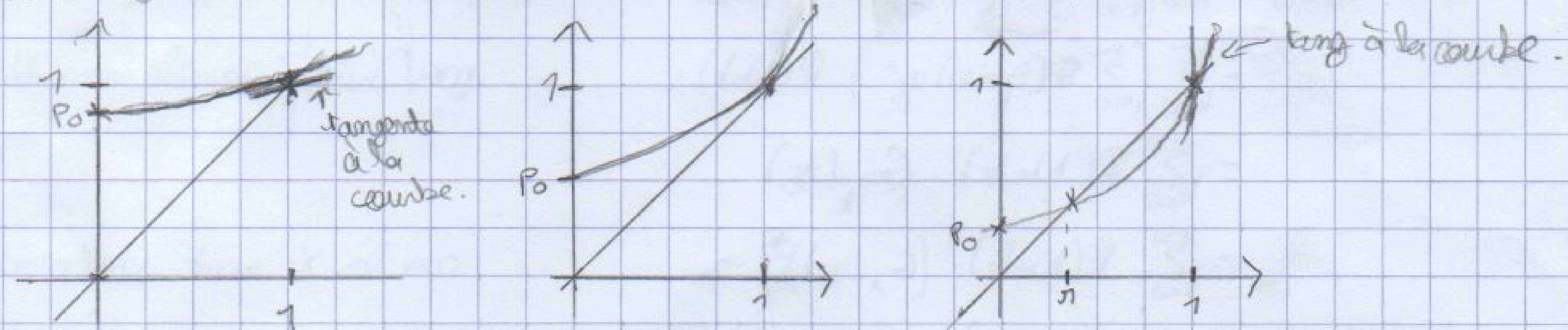


⇝ unique point fixe est 1.

On est dans le cas où $E(X) = p_1 \times 1 = p_1 < 1$

* si $p_0 + p_1 < 1$: $\exists k_0 \geq 2$, $p_{k_0} > 0$.
Alors : $G''(t) \geq k_0(k_0-1) p_{k_0} t^{k_0-2} > 0$ sur $]0,1[$. On en déduit que G est strictement convexe sur $]0,1[$ donc croise la droite $y=x$ au plus deux fois.

idée : tangente en dessous de la courbe de G. (et $\nearrow$ ⇝ 1 pt d'intersection)



$G'(1) < 1$ ⇒ unique point fixe — $G'(1) = 1$ ⇒ unique point — $G'(1) > 1$ ⇒ 1 autre point fixe r.

détails : On étudie $G(x) - x$:
$(G(x) - x)' = G'(x) - 1$ et $G'(0) - 1 = p_1 - 1 < 0$ et $G'(1) - 1 = m - 1$

* si $m > 1$, $G'(1) - 1 > 0$ donc par TVI, $\exists \alpha \in]0,1[$ tq $G'(\alpha) - 1 = 0$.

x	0		α		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1$	$-$	0	$+$	$m-1$
variation de $G(x) - x$	p_0	$\searrow$		$\nearrow$	0

donc $G(\alpha) - \alpha \leq 0$ et par TVI
$\exists r \in]0, \alpha]$ tq $G(r) - r = 0$

* si $m \leq 1$: $G'(1) - 1 \leq 0$ et $G'(0) - 1 \leq 0$; $G' \nearrow$

x	0		1
$G'(x) - 1$		$-$	
$G(x) - x$	p_0	$\searrow$	0